Formelsamling for TMA4105

Øyvind Skaaden 4. juni 2019

1 Vektorer og parametriserte kurver

Vi har en parametrisert kurve på formen

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t)) \quad \text{for en kurve i } \mathbb{R}^n$$

1.1 Sammenheng

Lengde

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{r_1(t)^2 + r_2(t)^2 + \cdots + r_n(t)^2}$$

Hastighet

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$$

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$

Akselerasjon

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

$$a(t) = |\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{v}'(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$$

1.2 Buelengde

Buelengden er gitt ved

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

1.3 Spesielle vektorer

Enhetstangentvektor

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

Enhetsnormalvektor

$$\hat{\mathbf{N}}(t) = \frac{\hat{\mathbf{T}}'(t)}{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}$$

Krumming

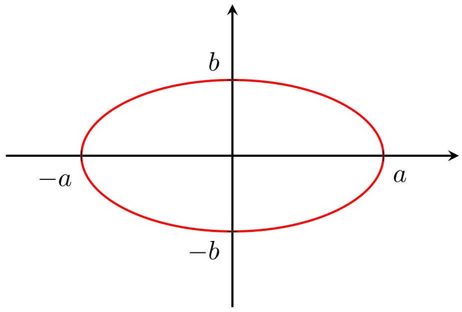
$$\mathscr{K}(t) = \frac{|\hat{\mathbf{T}}'(t)|}{v(t)} = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{v(t)^3}$$

Implisitt krumnigsformel

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}'(t)|\hat{\mathbf{T}}(t) + \mathscr{K}(t)|\mathbf{r}'(t)|^2\hat{\mathbf{N}}(t)$$

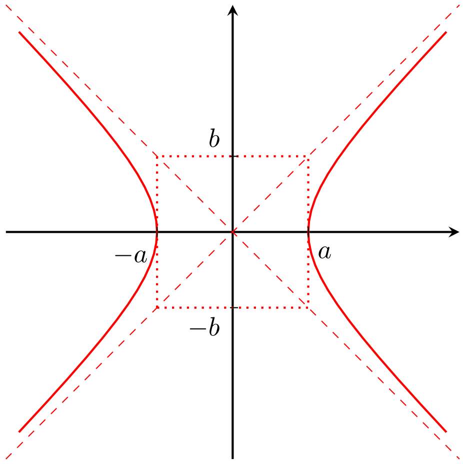
2 Kurver

Ellipse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

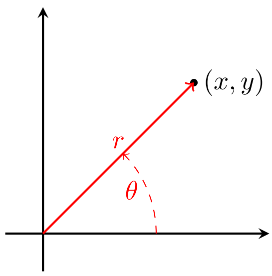
Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3 Polarkoordinater

Vi antar alltid $r > 0$ og $0 \leq \theta < 2\pi$



Da gjelder følgende

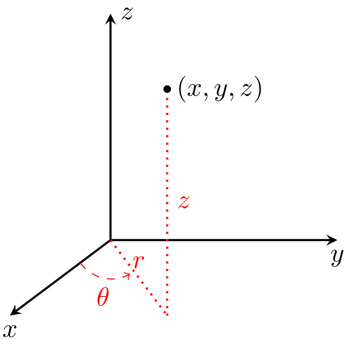
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= r\sin\theta & \theta &= \arctan\tfrac{y}{x} \end{aligned}$$

3.1 Areal

Arealet av strålene fra origo til en kurve $r(\theta)$

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\theta))^2\,\mathrm{d}t$$

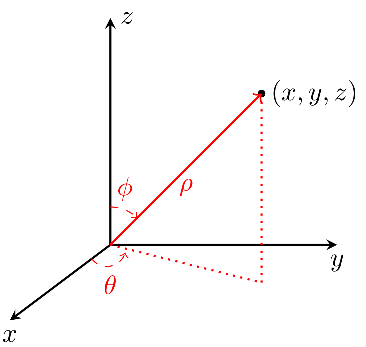
3.2 Sylinderkoordinater



Her gjelder de samme reglene som polarkoordinater i planet, men vi legger til et z-koordinat.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= r\sin\theta & \theta &= \arctan\tfrac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

3.3 Kulekoordinater



Her gjelder følgende i venstre del av tabellen. Høyre er for overgang fra sylinder til kule.

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta & \rho^2 &= r^2 + z^2 \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta & \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ z &= \rho\cos\phi & \phi &= \arctan\tfrac{z}{\rho} \end{aligned}$$

4 Derivering

4.1 Partiellderivering

La $f(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ være en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Da er den partiellderiverte til f, med hensyn på x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Tangentplan til en $f(a, b)$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$$

4.2 Gradientvektor

Gradientvektoren er gitt ved

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Lineærisering av tangentplan, gitt $\mathbf{a} = (a, b)$ og $\mathbf{x} = (x, y)$

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Kjerneregel. Dersom $w = f(x(t, u), y(t, u))$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

Retningsderiverte til f i punktet $P(x, y, z)$ i retning $\mathbf{u}$ (enhetsvektor)

$$D_u f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{u}$$

4.3 Max/min

Kritiske punkter

1. De punkter der $\nabla f = \mathbf{0}$
2. De punkter der ∇f ikke eksisterer
3. Alle punkter på randen

Andrederiverttesten. La $z = f(x, y)$, da blir

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Da gjelder følgende

- $\mathscr{D} < 0 \;\to\; (a, b)$ sadelpunkt
- $\mathscr{D} > 0 \wedge A > 0 \;\to\; (a, b)$ lokalt min
- $\mathscr{D} > 0 \wedge A < 0 \;\to\; (a, b)$ lokalt max
- $\mathscr{D} = 0 \to$ kan ikke konludere noe

4.4 Langranges Multiplikatormetode

Finner min/max ved å finne kritiske punkter til en funksjon L. Du finner max/min (punktet P) på $f(P)$ med en eller to bibetingelser $g(P)$ og/eller $h(P)$
1 bibetingelse:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

2 bibetingelser:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Kan også si at vi skal løse likningen

$$\nabla f = \lambda\nabla g + \lambda\nabla h$$

5 Multiple integral

5.1 Dobbeltintegraler

Gitt et område $R \in \mathbb{R}^2$, er dobbeltintegralet (eller volumet under $f(x,y)$ og xy-planet) gitt ved.

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Flateelementet

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Areal av området R, setter $f(x,y) = 1$

$$A = \iint_R \mathrm{d}A$$

5.2 Dobbeltintegraler i polarkoordinater

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Da er flateelementet

$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

5.3 Trippelintegraler

Gitt et område $T \in \mathbb{R}^3$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Volumelementet

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

5.4 Trippelintegraler i sylinder- og kulekoordinater

Sylinderkoordinater

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Volumelement

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinater

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{T'} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

Volumelementet

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

5.5 Variabelskifte

Skifter fra x og y til u og v

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}$$

Tilsvarende for, men en 3×3-matrise

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

5.6 Massesenterer

Massen av et legeme med massetetthet $\delta(x,y,z)$ i området T

$$m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_T \mathrm{d}m$$

Masseelementet

$$\mathrm{d}m = \delta(x,y)\,\mathrm{d}V$$

Massesenter

$$\bar{x}_n = \frac{1}{m}\iiint_T x_n\,\mathrm{d}m$$

6 Vektoranalyse

Et vektorfelt er gitt på formen

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

Divergens og Curl

$$\text{div}\ \mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

$$\text{curl}\ \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

6.1 Linjeintegral

Med hensyn på buelengde

$$\int_{\mathscr{C}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\cdot|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Linjeintegral for vektorfelt

$$\int_{\mathscr{C}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

6.2 Flateintegraler

La $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Arealet av en flate S over området R

$$A = areal(S) = \iint_R \mathrm{d}S = \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Arealelementet eller flateelementet

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{N}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Dersom du har en $f(x,y,z)$ som er en kontinuerlig funksjon og $\mathbf{r}(u,v)$ er en parametrisering av flaten S

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Dersom $z = h(x,y)$:

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, h(x,y))$$

Da blir

$$\mathbf{N}(x,y) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)$$

$$A = areal(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

og

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S =$$

$$\iint_R f(x,y,h(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

6.3 Fluksintegral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til S.

6.4 Konservative vektorfelt

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er konservativt dersom det finnes en potensialfunksjon $\phi(x,y,z)$ slik at

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla \phi(x,y,z)$$

Da gjelder også

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Følgende er ekvivalent i den åpne delmengden $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

- $\mathbf{F}$ er konservativt i D
- $\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ for stykkevis glatte kurver $\mathscr{C}$ i D
- Linjeintegralet $\int_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ er uavhenging av veien fra start til slutt

6.5 Greens teorem

La $\mathscr{C}$ være en lukket kurve i xy-planet, og R være området innenfor $\mathscr{C}$

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\mathscr{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}A$$

6.6 Stokes' teorem

La S være en stykkevis glatt flate med randkurve $\mathscr{C}$, med en enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ orientert likt på S og $\mathscr{C}$.

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\mathrm{curl}\ \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S$$

6.7 Divergensteoremet

La S være en stykkevis glatt og lukket flate og la T være området S omslutter.

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_T \mathrm{div}\ \mathbf{F}\,\mathrm{d}V$$