TTT4120 Assignment 2

Øyvind Skaaden (oyvindps)

11. september 2020

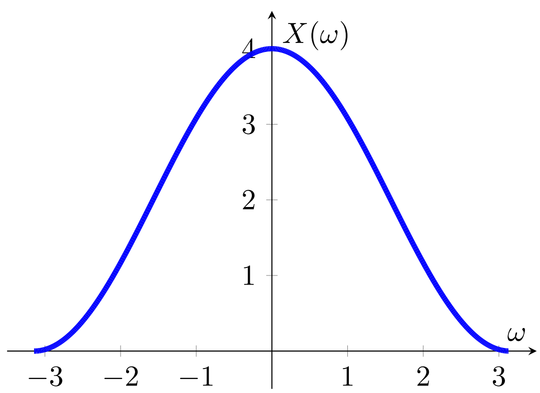
Problem 1.

(a) Vi fra oppgaven (1).

$$x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n = \pm 1 \\ 0 & ellers \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} && (2) \\ &= \sum_{n=-1}^{1} x[n]e^{-j\omega n} && (3) \\ &= e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega} && (4) \\ &= 2 + 2\cos\omega && (5) \end{aligned}$$

Spektrumet er skissert i figur 1.



Figur 1: Skisse av $X(\omega) = 2 + 2\cos\omega$.

(b) Vi har signalet (6).

$$y[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & ellers \end{cases} \tag{6}$$

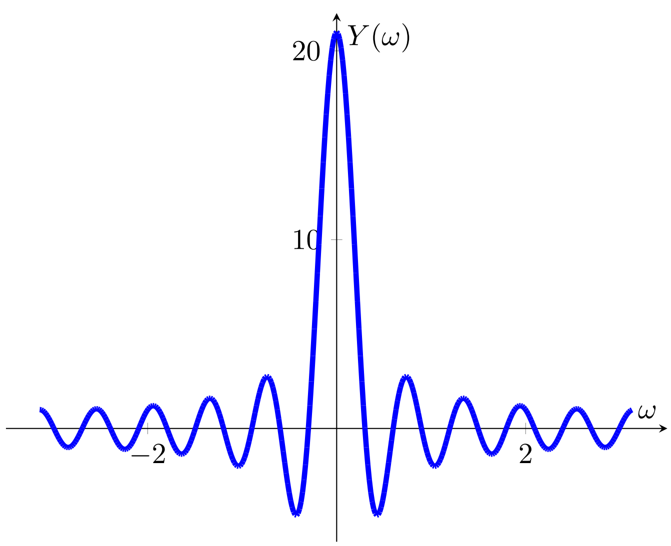
Vi gjennomfører Fourier-transformasjon.

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} && (7)\\
&= \sum_{n=-M}^{M} y[n]e^{-j\omega n} && (8)
\end{aligned}
$$

Vi subsiderer og bytter ut med $m = n + M$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{m} y[n]e^{-j\omega(m+M)} && (9)\\
&= e^{j\omega M}\sum_{m=0}^{m} y[n]e^{-j\omega m} && (10)\\
&= e^{j\omega M}\frac{1-e^{-j\omega(2M+1)}}{1-e^{-j\omega}} && (11)\\
&= \frac{e^{j\omega M}-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} && (12)\\
&= \frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{e^{-\frac{j\omega}{2}}}\cdot\frac{\left(e^{j\omega(M+\frac{1}{2})}-e^{-j\omega(M+\frac{1}{2})}\right)}{e^{\frac{j\omega}{2}}-e^{-\frac{j\omega}{2}}} && (13)\\
&= \frac{\sin\left(\omega\left(M+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} && (14)
\end{aligned}
$$

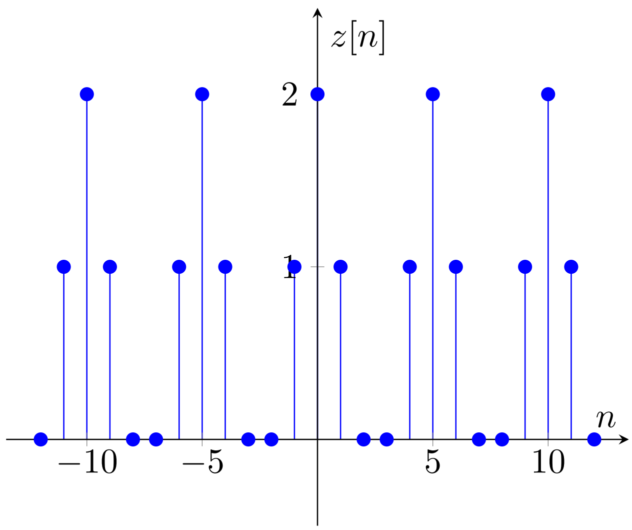
Spektrumet er skissert i figur 2.



Figur 2: Skisse av $Y(\omega)$, med $M = 10$.

(c) Både $X(\omega)$ og $Y(\omega)$ har reelle spektrum fordi $x[n]$ og $y[n]$ er like funksjoner.

(d) For at utvidelsen $z[n]$ av $x[n]$ skal være periodisk, må $N \geq 5$. Derfor velger vi $N = 5$ som er det korteste vi kan lage perioden. Dette er skissert i figur 3.



Figur 3: Skisse av $z[n]$.

Vi kan se ut ifra figuren at perioden går fra -2 til 2. Dette gir en $N = 5$. Vi kan da "skifte" nullpunktet to til høyre, slik at det første sample er ved 0. Dette gjør det enklere å regne ut fourier-koeffisientene. Dermed har vi rekken fra 0 til $N-1$, $z[n] = [2, 1, 0, 0, 1], \quad n \in [0, 4]$. Denne er periodisk med $N = 5$.

Da er fourier-koeffisientene c_k gitt ved (15).

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} \tag{15}$$

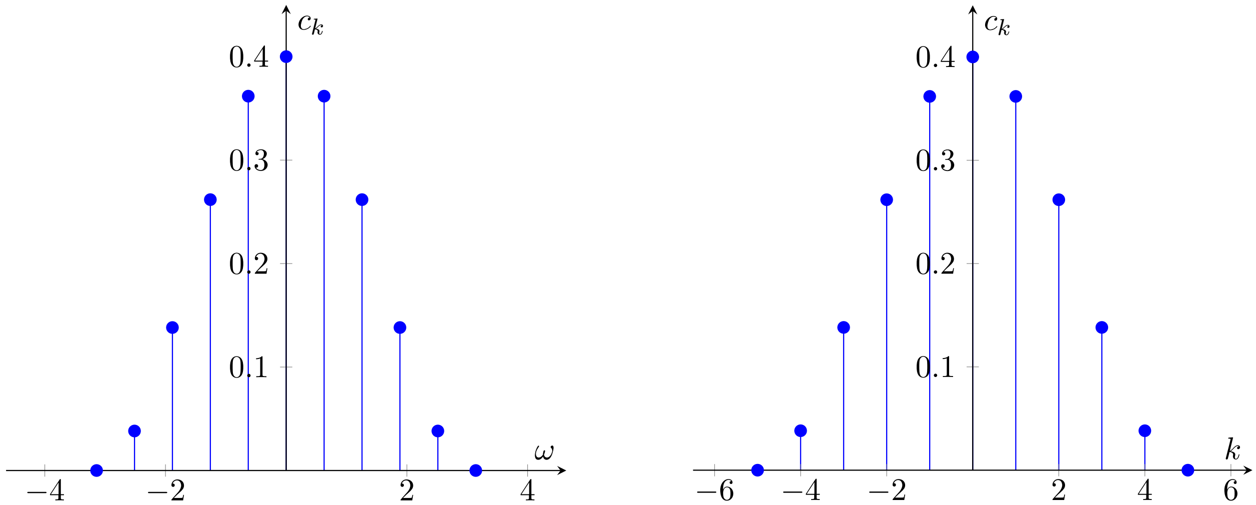
Vi regner ut c_k.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z[n] e^{-j\frac{2\pi k n}{N}} && (16)\\ &= \frac{1}{N}\left(2 + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k(N-1)}{N}}\right) && (17)\\ &= \frac{1}{N}\left(2 + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{-j2\pi k} e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right) && (18) \end{aligned}$$

Vi vet at $e^{-j2\pi k} = 1$ for alle k

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N}\left(2 + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right) && (19)\\ &= \frac{1}{N}\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) && (20) \end{aligned}$$

Vi får da koefisientene som vist i



(a) Skisse av koffisientene c_k, med ω som x-akse.

(b) Skisse av koffisientene c_k, med k som x-akse.

Figur 4: Fourier koeffisienter for c_k.

```python
import numpy as np

c_omega = {}
c_k = {}

length = 5

def coeff(k, N):
    # print(1/N)
    omega = 2* np.pi * (k / N)
    tmp = (1/N) * (2 + 2*np.cos(omega))
    print(str(k) + "\t" + str(tmp)) # used to generate latex data
    return omega, tmp

print("n\t xn") # used to generate latex data

for i in range(-length, length + 1, 1):
    tmp = coeff(i, length * 2)
    c_omega[tmp[0]] = tmp[1]
    c_k[i] = tmp[1]

print(c_omega) # dict with coefficients with omega as axis
print(c_k) # dict with coefficients with k as axis
```

Kodeeksempel 1: Kode for generasjon av data for plot i figur 4

Problem 2.

(a)

$$x_1[n] = x[n+3] \tag{21}$$

Bruker tidsskifting med $k = -3$

$$X_1(\omega) = e^{j3\omega} X(\omega) \tag{22}$$

(b)

$$x_2[n] = x[-n] \tag{23}$$

Bruker tidsinversering

$$X_2(\omega) = X(-\omega) \tag{24}$$

(c)

$$x_3[n] = x[3-n] = x[-(n-3)] \tag{25}$$

Bruker tidsskifting med $k = 3$ og tidsinversering

$$X_3(\omega) = e^{-j3\omega} X(-\omega) \tag{26}$$

(d)

$$x_4[n] = x[n] * x[n] \tag{27}$$

Bruker konvulosjon

$$X_4(\omega) = X(\omega)X(\omega) = X(\omega)^2 \tag{28}$$

Problem 3.

(a) For å finne frekvensresponsen $H(\omega)$ kan vi finne $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$, ved å gjøre en DTFT.

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \tag{29}$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} Y(\omega) = X(\omega) + 2e^{-j\omega}X(\omega) + e^{-j2\omega}X(\omega) \tag{30}$$

$$\Updownarrow$$

$$H_1(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \tag{31}$$

$$= e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}\right) \tag{32}$$

$$= e^{-j\omega}(2 + \cos(\omega)) \tag{33}$$

For den andre.

$$y[n] = -0.9y[n-1] + x[n] \tag{34}$$

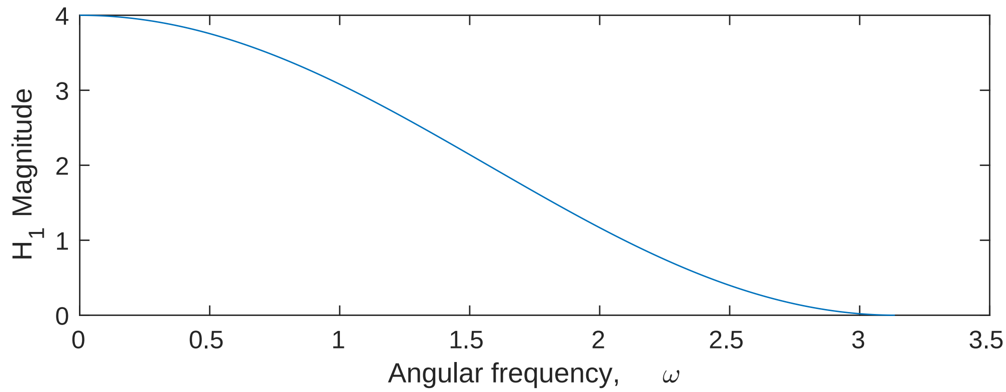
$$\overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} Y(\omega) = -0.9e^{-j\omega}Y(\omega) + X(\omega) \tag{35}$$

$$\Updownarrow$$

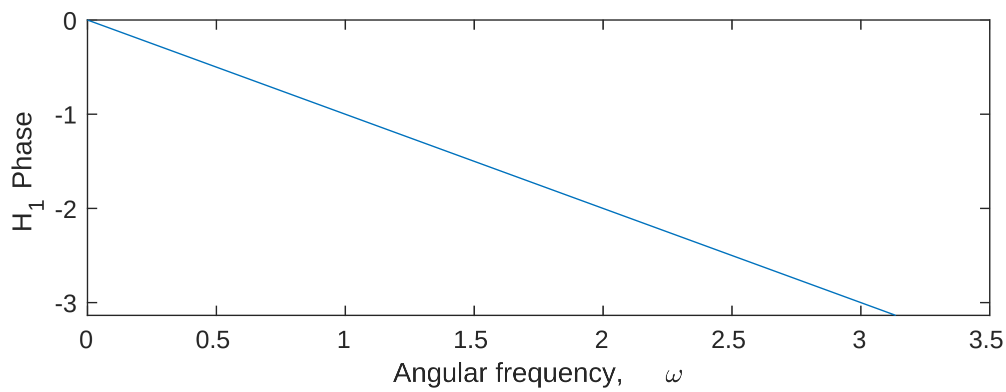
$$H_2(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + 0.9e^{-j\omega}} \tag{36}$$

(b)

(c) Amplitude og frekvensrespons til $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$ er i figur 5 og 6.

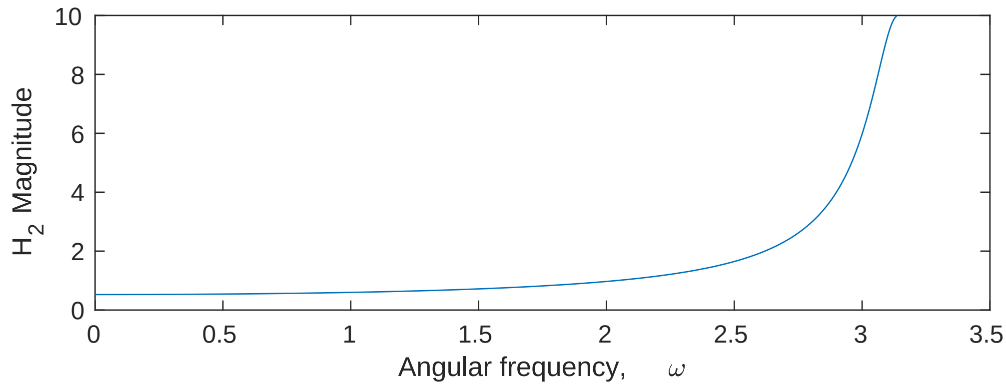


Figur 5: Amplituderespons for H_1

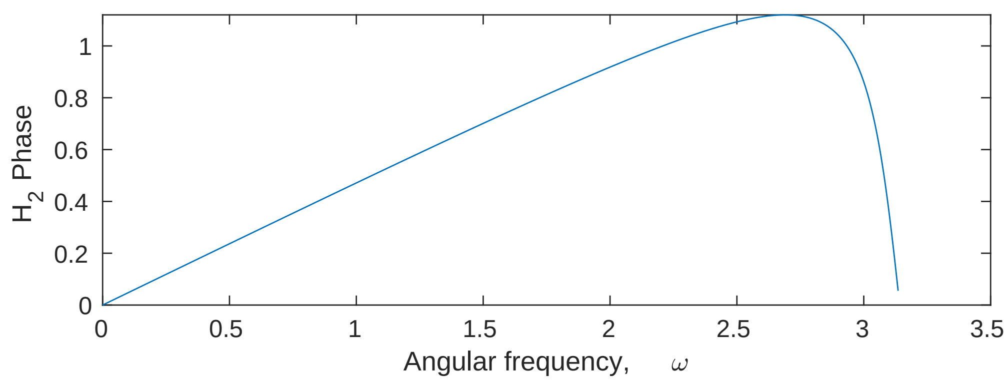


Figur 6: Faserespons for H_1

Amplitude og frekvensrespons til $y[n] = -0.9y[n-1] + x[n]$ er i figur 7 og 8.



Figur 7: Amplituderespons for H_2



Figur 8: Faserespons for H_2

Plotene er generert med koden i Kodeeksempel 2.

```
[H_1, w] = freqz([1 2 1], [1]);
subplot(2, 1, 1);
plot(w, abs(H_1));
xlabel('Angular frequency, \omega');
ylabel('H_1 Magnitude');
subplot(2, 1, 2);
plot(w, angle(H_1));
xlabel('Angular frequency, \omega');
ylabel('H_1 Phase');

[H_2, w] = freqz([1], [1 0.9]);
subplot(2, 1, 1);
plot(w, abs(H_2));
xlabel('Angular frequency, \omega');
ylabel('H_2 Magnitude');
subplot(2, 1, 2);
plot(w, angle(H_2));
xlabel('Angular frequency, \omega');
ylabel('H_2 Phase');
```

Kodeeksempel 2: Kode for å generere amplitude og faserespons i matlab.

(d) Ved å se på amplituderesponsen til systememe kan vi se at H_1 demper de lyse frekvensene mer, og er dermed et lavpassfilter. H_2 demper de lave frekvensene og slipper gjennom de høye, så dette er et høypassfilter.